19/3/2018

Φυλ. 1 Ασκ 1

$S = \mathbb{R} \setminus \{0\} = \mathbb{R}^*$ $\quad * : S \times S \to S$

$a * b = |a| \cdot b$

a) καλά ορισμένη: Άμεσο, γιατί $a \neq 0$ $b \neq 0 \Rightarrow$
$|a| \neq 0 \Rightarrow |a| \cdot b \neq 0$

Προσεταιριστική: Έστω $a, b, c \in S$. Τότε
$(a*b)*c = (|a| \cdot b)*c = ||a| \cdot b| \cdot c = ||a|| \cdot |b| \cdot c = |a| \cdot |b| \cdot c$
$= a * (|b| \cdot c) = a * (b*c)$

b) Έστω $e = 1$. Τότε για $b \in S$, $e * b = |1| \cdot b = b$

Έστω $a \in S$. Ψάχνουμε $b \in S$ με $a * b = e$ δηλ.
$|a| \cdot b = 1$.

Αρκεί να πάρουμε $b = \frac{1}{|a|}$

c) Έχει η $(S,*)$ ουδέτερο στοιχείο;

ΟΧΙ, Έστω ότι υπάρχει $\tilde{e} \in S$ ουδέτερο. Τότε για $a \in S$ $\tilde{e} * a = a \Rightarrow$

$$|\tilde{e}| \cdot a = a \Rightarrow |\tilde{e}| = 1 \Rightarrow \tilde{e} = 1 \text{ ή } \tilde{e} = -1$$

Αλλά $\tilde{e} = 1$ δεν είναι ουδέτερο, γιατί
$-1 * 1 = |-1| \cdot 1 = 1 \neq -1$

Επίσης $\tilde{e} = -1$ δεν είναι ουδέτερο, γιατί
$1 * (-1) = |1| \cdot (-1) = -1 \neq 1$

Άρα δεν υπάρχει $\tilde{e} \in S$ ουδέτερο.
Σαν συμπέρασμα $(S,*)$ όχι ομάδα γιατί δεν έχει ουδέτερο.

Φυλλάδιο 1 ασκ. 2 λύση στην σελίδα του Μπελληγιάννη. <u>ΠΡΟΣΟΧΗ</u>: πρέπει να δειχθεί
$x, y \in (-1,1) \subseteq \mathbb{R} \Rightarrow \dfrac{x * y}{1 + x \cdot y} \in (-1,1)$

- Φυλλάδιο 1 Ασκ. 3.

Έστω $(G,*)$ ομάδα με ουδέτερο στοιχείο e
Υποθέτουμε $|G| < 0$ και $|G| = 2n$ άρτιος. Δείξτε ότι υπάρχει $a \in G$ με $a \neq e$ ώστε $a * a = e$

<u>ΛΥΣΗ</u>

· <u>ΒΗΜΑ 1ο</u> Η G είναι ξένη ένωση δύο υποσυνόλων S_1, S_2

$$S_1 = \{a \in G : a^{-1} = a\}$$
$$S_2 = \{a \in G : a^{-1} \neq a\}$$

Άρα $|G| = |S_1| + |S_2|$ (*)

· <u>ΒΗΜΑ 2ο</u> $S_1 \neq \emptyset$, γιατί $e \in S_1$

· <u>ΒΗΜΑ 3ο</u> Ξέρουμε $(a^{-1})^{-1} = a$. Άρα το S_2 είναι ξένη ένωση συνόλων της μορφής $\{a, a^{-1}\}$

με $a \neq a^{-1}$. Συνεπώς $|S_2|$ άρτιος

<u>ΒΗΜΑ 4ο</u> Αφού από (*) $|S_1| = |G| - |S_2|$ έχουμε $|S_1|$ άρτιος.
Από Βήμα 2ο $|S_1| \geq 1$. Άρα $|S_1| \geq 2 \Rightarrow$ $a \in S_1$ με $a \neq e$. Αφού $a \in S_1 \Rightarrow a * a = e$

Φυλλάδιο 1 ασκ. 4.

Έστω $(G, *)$ ομάδα με ουδέτερο e. Υποθέτουμε $x * x = e$ για κάθε $x \in G$. Δείξτε G αβελιανή.

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u>

Έστω $x, y \in G$. Τότε $(x * y) * (y * x) =$

$(x * (y * y) * x) = x * e * x = x * x = e$ από υπόθεση

Επίσης, από υπόθεση $(x * y) * (x, y) = e$ (1) και δείξαμε $(x * y) * (y * x) = e$ (2)

Αφού G ομάδα, ισχύει η ιδιότητα της διαγραφής και οι (1) + (2) $\Rightarrow x * y = y * x$. Άρα G αβελιανή.

Φυλλ. 1 Ασκ. 5

Έστω $(G, *)$ ομάδα, $e \in G$ ουδέτερο, $a, b, c \in G$. Δείξτε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

a) $a * b * c = e$

b) $b * c * a = e$

c) $c * a * b = e$

Παρατήρηση: Παίρνουμε τα a, b, c με την ίδια σειρά αλλά αλλάζουμε ποιο είναι πρώτο.

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u>

a) $\Rightarrow$ b) $a * b * c = e \Rightarrow a^{-1} * (a * b * c) = a^{-1} * e \Rightarrow$
$(a^{-1} * a) * b * c = a^{-1} \Rightarrow e * b * c = a^{-1} \Rightarrow b * c = a^{-1} \Rightarrow$
$(b * c) * a = (a^{-1}) * a \Rightarrow b * c * a = a^{-1} * a \Rightarrow$
$b * c * a = e$

Η απόδειξη b) $\Rightarrow$ c) και c) $\Rightarrow$ a) είναι εντελώς παρόμοια.

Ασκ6. Φυλλάδιο 1

Σύνολο $\mathbb{C}=\mathbb{R}^2$, $+$, $\cdot$

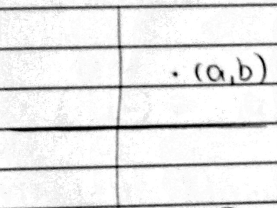
$(a_1,b_1)+(a_2,b_2)=(a_1+a_2,\ b_1+b_2)$

ΛΑΘΟΣ $(a_1,b_1)\cdot(a_2,b_2)=(a_1a_2,\ b_1b_2)$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ $(1,0)\cdot(0,1)=(0,0)$ πού δεν το θέλουμε

ΣΩΣΤΟ: $(a_1,b_1)\cdot(a_2,b_2)=(a_1a_2-b_1b_2,\ a_1b_2+a_2b_1)$

Ορίζουμε επίσης, αν $(a,b)\in\mathbb{C}$ γεωμετρική παράσταση του (a,b) είναι το σημείο $(a,b)\in\mathbb{R}^2$



Αν $(a,b)\in\mathbb{C}$ ορίζουμε

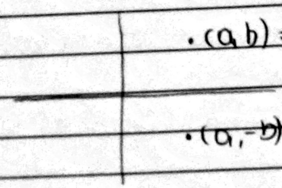
$|(a,b)|=\sqrt{a^2+b^2}$

Μέτρο

Γεωμετρικά η απόσταση του σημείου (a,b) στο $\mathbb{R}^2$ από το $(0,0)$.

Επίσης, ορίζουμε για $z=(a,b)\in\mathbb{C}$ τον μιγαδικό $\bar{z}=(a,-b)$. Ο $\bar{z}$ λέγεται συζυγής του z.

Γεωμετρική σημασία του $\bar{z}$: συμμετρικό ως προς άξονα των x.



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ Αν $z=(3,4)$ $|z|=\sqrt{3^2+4^2}=5$

$\bar{z}=(3,-4)$

Ορισμός: Θέτουμε $i=(0,1)\in\mathbb{C}$

Επίσης, αν $a\in\mathbb{R}$ ταυτίζουμε το $a\in\mathbb{R}$ με τον μιγαδικό $(a,0)$

ΠΡΟΤΑΣΗ

1) $i \cdot i = (-1,0) = -1 \in \mathbb{C}$

2) Το ζεύγος $(\mathbb{C},+)$ είναι αβελιανή ομάδα με ουδέτερο το $(0,0)$ και "αντίθετο" του (a,b) το $(-a,-b)$

3) Ο πολλαπλασιασμός στο $\mathbb{C}$ είναι μεταθετικός, προσεταιριστικός επιμεριστικός επί της πρόσθεσης. Έχει ουδέτερο στοιχείο το 1. Το $(\mathbb{C}\setminus\{(0,0)\}, \cdot)$ είναι ομάδα.

4) Κάθε στοιχείο του $\mathbb{C}$ γράφεται με μοναδικό τρόπο $a+bi$ όπου ταυτίζουμε το $a\in\mathbb{R}$ με το $(a,0)\in\mathbb{C}$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

1) $i\cdot i = (0,1)\cdot(0,1) = (0\cdot 0 - 1\cdot 1,\ 0\cdot 1 + 0\cdot 1) = (-1,0)$

2) Πολύ εύκολη άσκηση

3) Μεταθετικότητα: Άμεση από τον ορισμό.
Προσεταιριστικότητα: Εύκολη άσκηση
Επιμ. πολλαπλ. επί πρόσθ: « «
Ουδέτερο στοιχείο το $1 = (1,0) \in \mathbb{C}$ Άμεσο.
Ύπαρξη αντιστρόφου: Θα το δούμε.

4) Έστω $z = (a,b) \in \mathbb{C}$ με $a,b\in\mathbb{R}$. Φανερά $z = a+bi$ από τον ορισμό των $+$ και $\cdot$.
Τότε $(a_1+ib_1)(a_2+ib_2) = (a_1a_2 + i^2 b_1b_2) + (ia_1b_2 + ia_2b_1) =$
$(a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_1a_2 + a_2b_1)$

Παράδειγμα $(3+i)(2-i) = 3\cdot 2 - 3i + i2 - i^2 =$
$7 + (-1)i = 7 - i$

ΟΡΙΣΜΟΣ Αν $z = (a,b) = a+bi \in \mathbb{C}$, το a λέγεται πραγματικό μέρος του z και b φανταστικό μέρος του z.

ΠΡΟΤΑΣΗ Έστω $z = a+bi \in \mathbb{C}$. Τότε

$$z \cdot \bar{z} = |z|^2 = a^2+b^2 \in \mathbb{R}$$ (ταυτίζοντας $a \in \mathbb{R}$ $a+0i \in \mathbb{C}$)

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Από τον ορισμό του $\bar{z}$, έχουμε
$\bar{z} = (a,-b) = a-bi$
Άρα $z \cdot \bar{z} = (a+bi)\cdot(a-bi) = a^2 - abi + bia - b^2 \cdot i^2 =$
a^2+b^2

ΠΟΡΙΣΜΑ Έστω $z = a+bi \in \mathbb{C}$ μη μηδενικός δηλ., $(a,b) \neq (0,0)$. Τότε ο z αντιστρέφεται στο $\mathbb{C}$ με αντίστροφο το

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{a-ib}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} + \left(\frac{-b}{a^2+b^2}\right)i$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Άμεσο από την πρόταση

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ 1) $z = i$. Ποιο είναι το z^{-1};

(Θυμόμαστε $\frac{1}{z} = \left(\frac{1}{z}\right)\left(\frac{\bar{z}}{\bar{z}}\right) = \frac{\bar{z}}{z \cdot \bar{z}}$)

Άρα $\frac{1}{i} = \frac{1(\bar{i})}{i(\bar{i})} = \frac{1(-i)}{i(-i)} = -i$.

2) $$\frac{3+i}{1+2i} = \frac{(3+i)(\overline{1+2i})}{(1+2i)(\overline{1+2i})} = \frac{(3+i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = \frac{5-5i}{5} = 1-i$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ Σημαντική Ιδέα: Πολλαπλασιάζουμε με συζυγή του παρονομαστή για να γράψουμε κλάσμα $\frac{z_1}{z_2}$ με $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ $z_2 \neq 0$ στη μορφή $a+bi$ με $a,b \in \mathbb{R}$.

ΠΡΟΤΑΣΗ Έστω $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Τότε

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$$|z_1 \cdot z_2| = \sqrt{|z_1 \cdot z_2|^2} \overset{\text{ΠΡΟΤΑΣΗ}}{=\!=} \sqrt{(z_1 z_2)\overline{(z_1 z_2)}} \quad (*)$$

Εύκολα βλέπουμε $\overline{(z_1 \cdot z_2)} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$ άρα

$$(*) = \sqrt{(z_1 \cdot \overline{z_1})(z_2 \cdot \overline{z_2})} = \sqrt{|z_1| \cdot |z_2|^2} = |z_1| \cdot |z_2|$$

γιατί $\overline{(a_1 + b_1)} \cdot \overline{(a_2 + b_2)} = (a_1 - ib_1)(a_2 - ib_2) =$

$(a_1 a_2 - b_1 b_2) - i(a_1 b_2 + a_2 b_1)$

Ενώ $\overline{(z_1 z_2)} = \overline{(a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1)} =$

$(a_1 a_2 - b_1 b_2) - i(a_1 b_2 + a_2 b_1)$

Ορισμός Θέτουμε $T = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} \subseteq \mathbb{C}$

Γεωμετρικά T = ταυτίζεται με τον μοναδιαίο κύκλο $\mathbb{R}^2$

π.χ. $1 \in T$, $i \in T$, $-i \in T$, $1 + i \notin T$

ενώ $\frac{1+i}{\sqrt{2}} \in T$ γιατί $|1+i| = \sqrt{2} \neq 1$

γιατί $\left|\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = 1$

ΠΡΟΤΑΣΗ $(T, \cdot)$ υποομάδα του $(\underset{\mathbb{C} \setminus \{0\}}{\mathbb{C}^*}, \cdot)$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Έστω $z_1, z_2 \in T$. Τότε $|z_1| = 1$ $|z_2| = 1$

Άρα $|z_1 z_2| \underset{\text{πρόταση}}{=} |z_1||z_2| = 1 \cdot 1$, άρα $z_1, z_2 \in T$

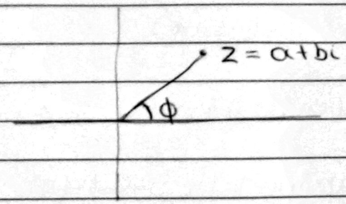
Έστω $z \in T$. Θα δείξουμε ότι $\frac{1}{z} \in T$. Έχουμε

$$z \cdot \left(\frac{1}{z}\right) = 1 \Rightarrow \left|z \cdot \left(\frac{1}{z}\right)\right| = |1| = 1 \Rightarrow$$

$$|z| \cdot \left|\frac{1}{z}\right| = 1 \Rightarrow \left|\frac{1}{z}\right| = 1$$

(Μάλιστα αν $z \in T$, εύκολα βλέπουμε $z^{-1} = \bar{z}$, γιατί $z \cdot \bar{z} = |z|^2 = 1^2 = 1$)

<u>ΠΡΟΤΑΣΗ</u> Έστω $z \in \mathbb{C}$ με $z \neq 0$. Θέτουμε $\rho = |z|$. Τότε υπάρχει $\phi \in \mathbb{R}$ με $z = \rho(\underbrace{\cos\phi}_{\text{συνφ}} + i\underbrace{\sin\phi}_{\text{ημφ}})$



Το ϕ είναι μοναδικό modulo 2π δηλ. αν ϕ, ϕ' δουλεύουν για το $z \iff$ υπάρχει $k \in \mathbb{Z}$ με $\phi - \phi' = 2k\pi$.

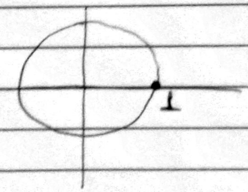
<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u> Αφού $\left|\frac{z}{\rho}\right| = \frac{|z|}{\rho} = 1$ έχουμε $\frac{z}{\rho} \in T$

Βλέποντας το T σαν τον τριγωνομετρικό κύκλο το αποτέλεσμα έπεται.

<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ</u> Να γραφτούν στην μορφή $\rho(\cos\phi + i\sin\phi)$

1) Το $2 = 2 + 0i \in \mathbb{C}$ $\quad \rho = \sqrt{2^2 + 0^2} = 2$

Ψάχνουμε $\phi \in \mathbb{R}$ με $\cos\phi + i\sin\phi = \frac{2}{\rho} = 1$.



$\iff \begin{cases} \cos\phi = 1 \\ \sin\phi = 0 \end{cases}$ Θέτουμε $\phi = 0$.

2) Το $i \in \mathbb{C}$ $\rho = |i| = |0 + 1i| = \sqrt{0^2+1^2} = 1$

Ψάχνουμε $\phi \in \mathbb{R}$ με $\cos\phi + i\sin\phi = \frac{i}{\rho} = i \iff$

$\begin{cases} \cos\phi = 0 \\ \sin\phi = 1 \end{cases}$ Θέτουμε $\phi = \frac{\pi}{2}$.

<u>ΠΡΟΤΑΣΗ</u>   Έστω $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ μη μηδενικά σε

$z_1 = \rho_1(\text{συν}\phi_1 + i\,\text{ημ}\phi_1)$

$z_2 = \rho_2(\text{συν}\phi_2 + i\,\text{ημ}\phi_2)$

όπου $\rho_1 = |z_1|$ $\rho_2 = |z_2|$ και $\phi_1, \phi_2 \in \mathbb{R}$.

Τότε $z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \cdot \rho_2)(\text{συν}(\phi_1+\phi_2) + i\,\text{ημ}(\phi_1+\phi_2))$ (*)

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u> $z_1 z_2 = \rho_1(\text{συν}(\phi_1) + i\,\text{ημ}(\phi_1))\,\rho_2(\text{συν}(\phi_2) + i\,\text{ημ}(\phi_2)) =$

$\rho_1\rho_2[\text{συν}(\phi_1)\text{συν}(\phi_2) - \text{ημ}(\phi_1)\text{ημ}(\phi_2)] + i[\text{συν}(\phi_2)\text{ημ}(\phi_1) + \text{συν}(\phi_1)\text{ημ}(\phi_2)]$

$= \rho_1\rho_2(\text{συν}(\phi_1+\phi_2) + i\,\text{ημ}(\phi_1+\phi_2))$ από γνωστές τριγωνομετρικές ταυτότητες.

<u>ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ</u>   Η ισότητα (*) λέγεται τύπος De Moivre.